15 - الجداء السلمي لمتجهتين من الفضاء.

1 - تعريف.

2 - المماثلة والخطانية.

3 - تعامد متجهتين.

← الصيغة التحليلية للجداء السلمي.

← تحديد تحليلي للمستوى.

$\{M \in (E) \;/\; \vec{u}.\vec{AM} = k\},\ k \in \mathbb{R}.$

- متجهة منظمية على مستوى.
- معادلة ديكارتية لمستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

← الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى.

← مسافة نقطة عن مستوى.

← الفلكة.

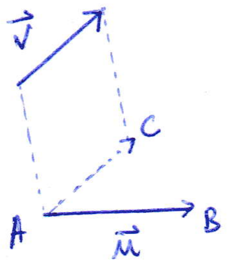
. مجموعة النقط $\vec{AM}.\vec{BM} = 0$

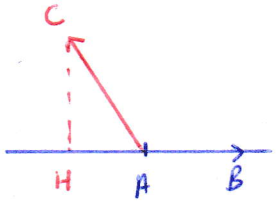
. " " $\vec{AM}.\vec{BM} = k$

. الأوضاع النسبية لفلكة ومستوى وفلكة ومستقيم.

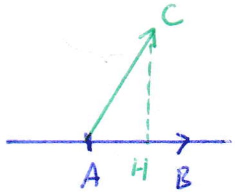
---

1 - تعريف:





$\vec{AB}.\vec{AC} = -AB \times AH$



$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AH$

2 - الخطانية والمماثلة:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات من الفضاء و $\alpha \in \mathbb{R}$.

لدينا: $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(\alpha\vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

3 - تعامد متجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من الفضاء و A و B و C ثلاث نقط بحيث:

$\vec{u} = \vec{AB}$ و $\vec{v} = \vec{AC}$

نقول أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتان ونكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$.

اذا كان: 1/ $\vec{u} = \vec{0}$ او $\vec{v} = \vec{0}$

أو: 2/ $(AB) \perp (AC)$.

← خاصية: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$

II - الصيغة التحليلية للجداء السلمي:

1 - منظم متجهة:

تعريف: لتكن $\vec{u} \in \mathcal{V}_3$.

الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{u}$ يسمى المربع السلمي ل $\vec{u}$ ونرمز له ب $\vec{u}^2$.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة $\vec{u}$ ونرمز له ب $\|\vec{u}\|$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

خاصية: لتكن $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_3$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

لدينا:

1/ $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

2/ $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|.\|\vec{u}\|$

3/ $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

2 - المعلم والأساس المتعامدان الممنظمان:

تعريف:

. نقول ان الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد ممنظم اذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ واحدية ومتعامدة مثنى مثنى.

أي أن $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ و $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

. نقول أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد ممنظم اذا كان الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامدا ممنظما.

3 - الصيغة التحليلية للجداء السلمي:

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

خاصية: لتكن $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ من $\mathcal{V}_3$

لدينا: $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

نتيجة 1: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

تعريف 2: ليكن $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ نقطتين من $(\mathcal{E})$. لدينا:

$$AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

مثال 1: ليكن $\vec{u}(1,0,2)\in\mathcal{V}_3$

و $A(1,2,3)$ و $B(2,4,3)$ من $(\mathcal{E})$

لدينا: $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$AB=\sqrt{\vec{AB}^2}$

لدينا: $\vec{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$

إذن $\vec{AB}(2-1, 4-2, 3-3)$

$\vec{AB}(1,2,0)$

ومنه: $AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$

مثال 2: لتكن $\vec{u}(1,4,0)$ و $\vec{v}(1,1,5)$

و $\vec{w}(-2,-3,1)$.

لدينا: $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times1+4\times1+5\times0=5$

و $\vec{v}\cdot\vec{w}=1\times(-2)+1\times(-3)+5\times1=0$

إذن: $\vec{v}\perp\vec{w}$.

تطبيقات: 1

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1,0,3)$ و $B(0,2,5)$

و $C(4,4,2)$ و $D(1,2,z)$

1- حدد إحداثيات المتجهات $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$

2- احسب المسافات AB و AC و BC.

3- احسب $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ ثم $\vec{BC}\cdot\vec{AC}$.

4- إعط إحداثيات $\vec{CD}$ بدلالة z.

5- احسب الجداء السلمي ل $\vec{AB}\cdot\vec{CD}$ بدلالة z

6- حدد z لكي يكون $\vec{AB}\perp\vec{CD}$.

III- تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء.

1- تحديد تحليلي للمجموعة $E=\{M / \vec{AM}\cdot\vec{u}=k, k\in\mathbb{R}\}$

لتكن $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a,b,c)$ من $\mathcal{V}_3$ حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $k\in\mathbb{R}$

لدينا: $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. $M\in E \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{u}=k$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=k$

$\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A+cz-cz_A-k=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$

حيث: $d=-ax_A-by_A-cz_A-k$

إذن $ax+by+cz+d=0$ معادلة مستوى (P) لأن a و b و c أعداد حقيقية ليست كلها منعدمة.

خاصية: مجموعة النقط M التي تحقق: $\vec{u}\cdot\vec{AM}=k$ هي مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$.

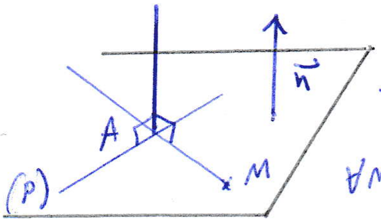
2- متجهة منظمية على مستوى

تعريف: نسمي متجهة منظمية على مستوى كل متجهة $\vec{n}$ غير منعدمة موجهة لمستقيم عمودي على المستوى.

3- معادلة ديكارتية لمستوى معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه:

ليكن (P) مستوى

و $A\in(P)$ و $\vec{n}$ منظمية عليه.



لدينا: $\forall M\in(P)\quad \vec{AM}\perp\vec{n}$

إذن $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\vec{n}(a,b,c)$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$

خاصية: a و b و c أعداد حقيقية ليست كلها منعدمة. مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء هي مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ والمتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ منظمية عليه.

← أمثلة :

نعتبر النقطتين $A(1,2,3)$ و $B(1,0,5)$

لدينا : $\vec{AB}(0,-2,2)$

معادلة المستوى (P) المار من B و $\vec{AB}$ منظمية عليه هي :

← أولا : نعتبر نقطة $M(x,y,z)\in(P)$.

لدينا : $\vec{AB}\cdot\vec{BM}=0$

لدينا $\vec{BM}(x-1,y,z-5)$ و $\vec{AB}(0,-2,2)$

إذن $\vec{AB}\cdot\vec{BM}=0 \Rightarrow 0(x-1)-2(y)+2(z-5)=0$

ومنه : $(P): -2y+2z-10=0$

ط2 : $\vec{AB}$ متجهة منظمية على (P) إذن

$(P): -2y+2z+d=0$

وبما أن $B\in(P)$ فإن

$-2y_B+2z_B+d=0$

$\Rightarrow -2\times0+2\times5+d=0$

$\Rightarrow 10+d=0 \Rightarrow d=-10$

وبالتالي : $(P): -2y+2z-10=0$

تطبيقات : (2)

1) حدد معادلة للمستوى (P_1) المار من النقطة $A(0,1,2)$ والمتجهة $\vec{u}(1,4,-3)$ منظمية عليه.

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P_2) العمودي على المستقيم (AB) في النقطة B حيث : $A(0,4,3)$ و $B(1,2,5)$.

3) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P_3) الموازي للمستوى $(P): x+y-2z+1=0$ والمار من النقطة $C(1,2,4)$.

← تعليق :

إذا كان المستويان (P_1) و (P_2) متوازيان فإن كل متجهة منظمية على أحدهما منظمية على الآخر.

4 - الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى ولمستويين :

خاصية :

ليكن (P) و (Q) مستويين و $D(A,\vec{u})$ مستقيما.

إذا كانت $\vec{v'}\perp(P)$ و $\vec{v}\perp(Q)$ فإن :

$\vec{v}\perp\vec{v'} \Leftrightarrow (P)\perp(Q)$

$\vec{v}//\vec{v'} \Leftrightarrow (P)//(Q)$.

$\vec{v}\perp\vec{u} \Leftrightarrow (P)//(D)$

$\vec{v}//\vec{u} \Leftrightarrow (P)\perp(D)$.

مثال

نعتبر المستوى $(P): 2x+y-z=8$ والمستوى (Q) المار من أصل المعلم و $\vec{v_2}(1,4,-2)$ منظمية عليه. والمستقيم (D) المار من $A(1,0,1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{n}(4,2,-2)$.

لدينا : $\vec{v_1}(2,1,-1)$ منظمية على (P)

لدينا : $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2\times1+4\times1+(-1)\times(-2)=8\neq0$

إذن (P) و (Q) غير متعامدان

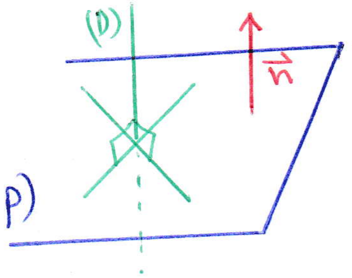
وبما أن $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2\times4-1\times1=8-1=7\neq0$

إذن $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ غير متوازيتان إذن $(P)\not\parallel(Q)$

لدينا : $\vec{n}=2\vec{v_1}\Rightarrow\vec{n}//\vec{v_1}\Rightarrow(P)\perp(D)$

ملاحظة :

إذا كان $(D)\perp(P)$ فإن كل متجهة موجهة للمستقيم (D) منظمية على (P)



تطبيق : (3)

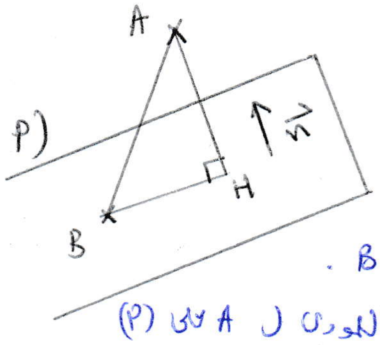
نعتبر النقطة $A(1,2,4)$ و $(P): 2x+3y+z-6=0$

1 - حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على (P).

2 - استنتج إحداثيات H مسقط A على (P).

← تعليق : $H\in(P)$ و $H\in(\Delta)$.

5 _ مسافة نقطة عن مستوى :



نعتبر المستوى (P)
و $\vec{n}$ متجهة منظمية
عليه.
لتكن A نقطة
من الفضاء و $B\in(P)$.

لدينا : H المسقط العمودي ل A على (P)

إذن $\vec{AB}\cdot\vec{n} = (\vec{AH}+\vec{HB})\cdot\vec{n}$

$= \vec{AH}\cdot\vec{n} + \vec{HB}\cdot\vec{n}$

بما أن $\vec{n} \perp \vec{HB}$ فإن $\vec{n}\cdot\vec{HB}=0$

إذن $\vec{AB}\cdot\vec{n} = \vec{AH}\cdot\vec{n} \Rightarrow |\vec{AB}\cdot\vec{n}| = AH\cdot\|\vec{n}\|$

إذن $AH = \frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

خاصية :

لتكن (P) مستوى مار من نقطة B من الفضاء
و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه. ولتكن A نقطة من
الفضاء و H مسقطها العمودي على (P)
لدينا: مسافة A عن (P) هي المسافة AH التي نرمز لها
ب $d(A,(P))$ ولدينا : $d(A,(P)) = \frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

نتيجة :

إذا كانت $A(x_A,y_A,z_A)$ و $(P): ax+by+cz+d=0$
و $\vec{n}(a,b,c)$ فإن

$$d(A,(P)) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال :

نعتبر النقط $A(1,1,2)$ و $B(0,2,1)$ و $C(3,3,5)$

① لنحدد معادلة المستوى (P) المار من C بحيث $\vec{AB}$
منظمية عليه.

لدينا : $\vec{AB}(0-1, 2-1, 1-2)$

$\Rightarrow \vec{AB}(-1, 1, -1)$

لتكن $M(x,y,z)$: $M\in(P)$ و $C\in(P)$

إذن $\vec{CM}(x-3, y-3, z-5)$

أي أن : $\vec{AB}\cdot\vec{CM}=0$

$\Rightarrow -1(x-3)+1(y-3)-1(z-5)=0$

$\Rightarrow -x+3+y-3-z+5=0$

$\Rightarrow (P): -x+y-z+5=0$

② لنحدد مسافة النقطة A عن (P).

لدينا : $d(A,(P)) = \frac{|-x_A+y_A-z_A+5|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|-1+1-2+5|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

تطبيق ④

① نعتبر النقط $A(0,0,1)$ و $B(2,1,3)$
و $C(5,2,0)$.
حدد معادلة المستوى (P) المار من B والذي تكون $\vec{AC}$
منظمية عليه.

② احسب المسافة $d(B,(P))$.

III _ الفلكة : Sphere

تعريف :

لتكن Ω نقطة من الفضاء و R عددا حقيقيا موجبا.
مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\Omega M=R$
تسمى فلكة مركزها Ω وشعاعها R ونرمز
لها بالرمز $S(\Omega,R)$ أو (S).
إذا كانت A و B نقطتان من (S) و Ω
منتصف القطعة [AB] فإن [AB] يسمى قطر (S).

معادلة ديكارتية لفلكة :

لتكن (S) فلكة شعاعها R ومركزها Ω

لدينا : $M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

$\Omega M = \|\vec{\Omega M}\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

مثال:

1) المعادلة الديكارتية للفلكة التي مركزها $\Omega(0,1,2)$ وشعاعها $R=3$ هي:

$$(S): (x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3^2$$

$$\Rightarrow (S): x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9.$$

← مجموعة النقط M بحيث: $\vec{AM}.\vec{BM}=0$

خاصية: مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{AM}.\vec{BM}=0$ هي فلكة أحد أقطارها $[AB]$.

مثال:

لتكن $A(0,1,1)$ و $B(1,2,0)$ نقطتين من الفضاء، لنحدد مجموعة النقط M التي تحقق:

$$\vec{AM}.\vec{BM}=0$$

نعلم أن مجموعة النقط M بحيث $\vec{AM}.\vec{BM}=0$ هي فلكة أحد أقطارها $[AB]$، لنحدد معادلتها؛

لدينا: $\vec{AM}.\vec{BM}=0$

لتكن $M(x,y,z)$ إذن $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}$

إذن $\vec{AM}.\vec{BM}=0 \Rightarrow x(x-1)+(y-1)(y-2)+z(z-1)=0$

$$\Rightarrow x^2-x+y^2-2y-y+2+z^2-z=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-x-3y-z+2=0$$

إذن هي المعادلة الديكارتية للفلكة.

← مجموعة النقط: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

تقديم:

لتكن (S) مجموعة النقط بحيث:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

لدينا: $M\in(S) \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$$\Rightarrow x^2-2ax+y^2-2by+z^2-2cz+d=0$$

$$\Rightarrow (x-a)^2-a^2+(y-b)^2-b^2+(z-c)^2-c^2=-d$$

$$\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d$$

نضع: $D=a^2+b^2+c^2-d$

1_ إذا كان $D<0$ فإن $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<0$

إذن $S=\emptyset$.

2_ إذا كان $D=0$ فإن $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$

إذن $x=a$ و $y=b$ ، $z=c$.

أي أن $S=\{\Omega(a,b,c)\}$

3_ إذا كان $D>0$ فإن $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(\sqrt{D})^2$

إذن (S) عبارة عن فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $R=\sqrt{D}$.

مثال:

(1) لنحدد طبيعة المجموعة: $E_1: x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+1=0$

لدينا: $c=-1$ و $b=-1$ و $a=-1$ ، $d=1$

إذن $D=a^2+b^2+c^2-d$

$=(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2-1=2>0$

إذن E_1 فلكة مركزها $\Omega(-1,-1,-1)$ وشعاعها $\sqrt{2}$.

(2) لنحدد طبيعة المجموعة: $E_2: x^2+y^2+z^2-2x-4y+10=0$

لدينا: $a=1$ و $b=2$ و $c=0$ ، $d=10$

إذن $D=1^2+2^2+0^2-10=-5<0$

إذن $E_2=\emptyset$

تطبيقات: 5

حدد في كل حالة، مجموعة النقط التالية:

$(S_1): x^2+y^2+z^2-4x+6y=0$

$(S_2): x^2+y^2+z^2+4y-2z+5=0$

$(S_3): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+19=0$

$(S_4): x^2+y^2+z^2-4x-4z+2=0$

$(S_5)\quad x^2+y^2+z^2-1=0$

← تمثيل بارامتري لفلكة:

خاصية وتعريف:

لتكن (S) فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها R

لدينا:

$$M(x,y,z)\in(S) \iff \begin{cases} x = a + R\sin\varphi\cos\theta \\ y = b + R\sin\varphi\sin\theta \\ z = c + R\cos\varphi \end{cases} ,\ \varphi,\theta\in\mathbb{R}$$

هذه النظمة تسمى تمثيلا بارامتريا للفلكة (S).

مثال

نعتبر الفلكة: $S(\Omega(1,0,2),\ R=3)$

لدينا:

$$\begin{cases} x = 1+3\sin\varphi\cos\theta \\ y = 0+3\sin\varphi\sin\theta \\ z = 2+3\cos\varphi \end{cases} ,\ \varphi,\theta\in\mathbb{R}$$

تمثيل بارامتري ل (S).

← لتحديد نقطة من (S) يكفي تعويض θ و φ بعددين.

مثلا نأخذ $\varphi=\theta=0$ لدينا:

$x = 1+3\sin 0.\cos 0 = 1.$

$y = 3\sin 0.\sin 0 = 0 \Rightarrow A(1,0,5)\in(S).$

$z = 2+3\cos 0 = 3+2=5$

تطبيق 6 :

1- حدد مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z+10=0$$

2- اعط تمثيلا بارامتريا لهذه المجموعة.

3- حدد نقطتين مختلفتين من هذه المجموعة.

IV- الأوضاع النسبية لفلكة ومستوى / فلكة ومستقيم:

1- فلكة ومستوى:

لتحديد الوضع النسبي لفلكة ومستوى، نحسب المسافة بين مركز الفلكة والمستوى، نسمي هذه المسافة d.

← اذا كان $d>R$ فإن المستوى لا يقطع الفلكة.

← اذا كان $d=R$ فإن المستوى مماس للفلكة.

← اذا كان $d<R$ فإن المستوى يقطع الفلكة وفق دائرة شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$

← مثال

نعتبر الفلكة: $S(\Omega(1,2,0),\ R=4)$

والمستويين: $(P): x+y+z+3=0$

و $(Q): 2x+y+z+8=0$

1- نحسب $d(\Omega,(P))$ و $d(\Omega,(Q))$

لدينا:

$$d(\Omega,(Q)) = \frac{|2\times1+2+0+8|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{12}{\sqrt6} = 2\sqrt6 > 4$$

اذن $S\cap(Q)=\emptyset$.

لدينا:

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|1+2+0+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt3} = 2\sqrt3 < 4$$

اذن المستوى (P) يقطع الفلكة وفق دائرة شعاعها

$$r=\sqrt{4^2-(2\sqrt3)^2}=\sqrt{16-4\times3}=\sqrt4=2$$

← لتحديد التقاطع يكفي تحديد مركز الدائرة

نسمي H مركز الدائرة.

لدينا $\vec n(1,1,1)$ منظمية على المستوى (P) وكذلك المستقيم (ΩH) عمودي على (P). اذن $\vec n$ موجهة ل (ΩH)

اذن:
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$$
تمثيل بارامتري ل (ΩH) ولدينا $H\in(P)$

فإن احداثيات H هي حل النظمة المكونة من تمثيل البارامتري (ΩH) و معادلة المستوى.

نحصل على:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=t \\ x+y+z+3=0 \end{cases} \Rightarrow 1+t+2+t+t+3=0 \Rightarrow 3t+6=0 \Rightarrow t=-2$$

ومنه $H(1-2,\ 2-2,\ -2)$

اذن $H(-1,0,-2)$

2- فلكة ومستقيم:

لتحديد التقاطع نحل النظمة المكونة من التمثيل البارامتري للمستقيم ومعادلة الفلكة.

مثال

لنحدد تقاطع المستقيم $D\left(A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$ والفلكة $S\left(\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, R=4\right)$

لدينا: $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ تمثيل بارامتري لـ (D)

و $(S): (x-1)^2+y^2+(z-3)^2=4^2$ معادلة ديكارتية لـ (S).

لنحل النظمة المكونة من التمثيل البارامتري للمستقيم (D) و معادلة الفلكة (S).

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=2-t \\ (x-1)^2+y^2+(z-3)^2=4^2 \end{cases} \Rightarrow (1-1)^2+(1+2t)^2+(2-t-3)^2=16$$

$$\Rightarrow 1+4t+4t^2+t^2+2t+1=16$$

$$\Rightarrow 5t^2+6t-14=0$$

$$\Delta = 6^2-4\times5\times(-14) = 36+20\times14 = 316>0$$

$$t_1=\frac{-6+\sqrt{316}}{2\times5} \quad \text{و} \quad t_2=\frac{-6-\sqrt{316}}{2\times5}$$

إذن نقطتا التقاطع هما $H_1\left(1, \frac{-1+\sqrt{316}}{5}, \frac{26+\sqrt{316}}{10}\right)$

$H_2\left(1, \frac{-1-\sqrt{316}}{5}, \frac{26+\sqrt{316}}{10}\right)$.

تصحيح التطبيقات:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

تطبيق 1:

نعتبر النقط $A(1,0,3)$ و $B(0,2,5)$ و $C(4,4,2)$ و $D(1,2,z)$.

1- لدينا $\vec{AB}(0-1, 2-0, 5-3)$

إذن $\vec{AB}(-1,2,2)$

بالمثل نجد $\vec{AC}(3,4,-1)$ و $\vec{BC}(4,2,-3)$

2- المسافات:

لدينا $\vec{AB}(-1,2,2)$ إذن $AB=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}$
$=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

بالمثل: $AC=\sqrt{26}$ و $BC=\sqrt{29}$

3- الجداء السلمي: $\vec{AB}(-1,2,2)$ و $\vec{AC}(3,4,-1)$

إذن $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(-1\times3)+(4\times2)+(-1)\times2$
$=-3+8-2=3.$

4- إحداثيات $\vec{CD}$: $C(4,4,2)$, $D(1,2,z)$

لدينا: $\vec{CD}(1-4, 2-4, z-2)$

إذن $\vec{CD}(-3,-2,z-2)$

5- الجداء السلمي $\vec{CD}\cdot\vec{AB}$

لدينا: $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=(-3)\times(-1)+2\times(-2)+2(z-2)$
$=3-4+2z-4=2z-5.$

6- تحديد z لكي يكون $\vec{AB}\perp\vec{CD}$

نعلم أن $\vec{AB}\perp\vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB}\perp\vec{CD}$
$\Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$
$\Rightarrow 2z-5=0$
$\Rightarrow z=5/2.$

تطبيق 2

1- معادلة المستوى المار من $A(0,1,2)$ و $\vec{n}(1,4,-3)$ منظمية عليه.

لدينا: $(P): x+4y-3z+d=0$

وبما أن $A\in(P)$ فإن $x_A+4y_A-3z_A+d=0$

$\Rightarrow 0+4\times1-3\times2+d=0 \Rightarrow 4-6+d=0$
$\Rightarrow d=2$

إذن $(P): x+4y-3z+2=0$

2- معادلة المستوى المار من B بحيث المستقيم (AB) عمودي عليه و $A(0,4,3)$ و $B(1,2,5)$.

إذن $(AB)\perp(P)$ متجهة $\vec{AB}$ منظمية على (P)

ولدينا $\vec{AB}(1,-2,2)$ ونتبع الطريقة

نعلم (P): $(P): x-2y+2z+d=0$

$B \in (P) \Rightarrow x_B - 2y_B + 2z_B + d = 0$

$\Rightarrow 1 - 2\times 2 + 2\times 5 + d = 0$

$\Rightarrow 1 - 4 + 10 + d = 0$

$\Rightarrow d = -7.$

3 - معادلة المستوى (P_3) الموازي للمستوى (P) و المار من C

$(P): x + y - 2z + 1 = 0$

$(P_3) // (P)$ إذن كل متجهة منظمية على (P) هي منظمية على (P_3)، إذن $\vec{n}(1,1,-2)$ منظمية على (P_3)، إذن

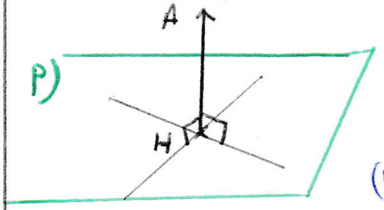
$(P_3): x + y - 2z + d = 0$

وبما أن $C \in (P_3)$ إذن $x_C + y_C - 2z_C + d = 0$

$\Rightarrow 1 + 2 - 2\times 4 + d = 0 \Rightarrow d = 5$

$\Rightarrow (P_3): x + y - 2z + 5 = 0.$

تطبيق 3



$A(1,2,4)$

$(P): 2x + 3y + z - 6 = 0$

لتكن H المسقط العمودي لـ A على (P)

لدينا $(AH) \perp (P)$ و $\vec{n}(2,3,1)$ منظمية على (P)

إذن $\vec{n}$ موجهة لـ (AH) إذن:

تمثيل بارامتري لـ (AH):
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

وبما أن $H \in (P)$ فإن احداثيات H تحقق كذلك معادلة (P)

إذن احداثيات H تحقق النظمة المكونة من التمثيل البارامتري لـ (AH) و معادلة (P).

إذن

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 + t \\ 2x + 3y + z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(1+2t) + 3(2+3t) + 4 + t - 6 = 0$$

$\Rightarrow 2 + 4t + 6 + 9t + 4 + t - 6 = 0$

$\Rightarrow 14t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\times\left(\frac{-3}{7}\right) \\ y = 2 + 3\times\left(\frac{-3}{7}\right) \\ z = 4 + \frac{-3}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{5}{7} \\ z = \frac{25}{7} \end{cases}.$$

تطبيق 4

لدينا: $A(0,0,1)$ ، $B(2,1,3)$ و $C(5,2,0)$

لدينا $\vec{AC}(5,2,-1)$ و $\vec{AC} \perp (P)$

إذن: $(P): 5x + 2y - z + d = 0$

$B \in (P) \Rightarrow 5x_B + 2y_B - z_B + d = 0$

$\Rightarrow 5\times 2 + 2\times 1 - 3 + d = 0$

$\Rightarrow d = -9$

$\Rightarrow (P): 5x + 2y - z - 9 = 0$

2 - المسافة $d(B,(P))$

لدينا:
$$d(B,(P)) = \frac{|5x_B + 2y_B - z_B - 9|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|5\times 2 + 2\times 1 - 3 - 9|}{\sqrt{25+4+1}} = \frac{0}{\sqrt{30}} = 0$$

(لأن $B \in (P)$)

تطبيق 5

لدينا $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y = 0$

إذن $a = 2$ و $b = -3$ ، $c = 0$ ، $d = 0$

إذن $D = 2^2 + (-3)^2 = 13 > 0$

إذن (S_1) فلكة مركزها $\Omega(2,-3,0)$ وشعاعها $R = \sqrt{13}$

$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

إذن $a = b = c = 0$ ، $d = -1$

إذن $D = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1 = 1 > 0$

إذن (S_2) فلكة مركزها أصل المعلم وشعاعها $R = 1$

تطبيق 6

1 - معادلة الفلكة: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z + 10 = 0$

$a = 2,\ b = -1,\ c = -3,\ d = 10.$

لدينا: $D = 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2 - 10$

$= 4 + 1 + 9 - 10 = 4 > 0$

إذن المجموعة فلكة مركزها $\Omega(2,-1,-3)$ وشعاعها $R = 2$

2 - التمثيل البارامتري:
$$\begin{cases} x = 2 + 2\sin\varphi\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\varphi\sin\theta \\ z = -3 + 2\cos\varphi \end{cases}, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$$

3 - تحقق من الجواب:

أ - النقطة $\varphi = \theta = 0$ إذن
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

ب - الثاني $\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}$ إذن
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$